

# Geometría Proyectiva

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2007

---

## Práctica 2 - Curvas en el espacio: el Triedro de Frenet

1. Probar que bajo cualquiera de las condiciones siguientes la curva en cuestión es una recta:

- a) Todas las tangentes a la curva pasan por un punto fijo.
- b) Todas las tangentes a la curva son paralelas a una recta dada.

2. Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva diferenciable, y  $[a, b] \subset I$  un subintervalo cerrado de  $I$ . Para cada partición  $P = \{a = t_0 < t_1 \dots < t_n = b\}$  de  $[a, b]$ , consideremos la suma

$$l(\alpha, P) = \sum_{i=1}^n |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|.$$

Recordar que  $|P| = \max_{i=1, \dots, n} (t_i - t_{i-1})$  es la norma de la partición  $P$ .

Probar que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $|P| < \delta$ , entonces

$$\left| \int_a^b |\alpha'(t)| dt - l(\alpha, P) \right| < \epsilon.$$

3. Hallar el vector tangente unitario a la curva en  $\mathbb{R}^3$  definida por

$$(F_1(x, y, z) = 0) \cap (F_2(x, y, z) = 0).$$

4. Dada una curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  **parametrizada por longitud de arco**, denotemos con  $\mathbf{t}(s)$  al vector tangente unitario a  $\alpha(s)$ . Como en el espacio no hay manera de elegir de manera natural un vector ortogonal a  $\mathbf{t}$ , definimos la **curvatura** de  $\alpha$  como el escalar positivo

$$\kappa(s) = |\mathbf{t}'(s)|,$$

y el vector **normal** a  $\alpha(s)$  como

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{|\mathbf{t}'(s)|}.$$

Observar que

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s).$$

Definimos asimismo el vector  $\mathbf{b}$  o **binormal** como el único vector unitario tal que  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  es una base ortonormal orientada positivamente de  $\mathbb{R}^3$ , es decir,

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s).$$

- a) Probar que  $\mathbf{b}'(s)$  es múltiplo de  $\mathbf{n}(s)$  para todo  $s \in I$ .  
 b) De acuerdo al ítem anterior, podemos escribir

$$\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s).$$

$\tau$  se denomina la **torsión** de  $\alpha$ . Mostrar que

$$\tau(s) = \frac{\langle \alpha'(s) \times \alpha''(s), \alpha'''(s) \rangle}{\kappa^2(s)}.$$

5. Verificar que las fórmulas de Frenet

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = & \kappa\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' = -\kappa\mathbf{t} & +\tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' = & -\tau\mathbf{n} \end{cases}$$

pueden escribirse como

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = R \times \mathbf{t} \\ \mathbf{n}' = R \times \mathbf{n} \\ \mathbf{b}' = R \times \mathbf{b} \end{cases}$$

donde  $R$  es la curva definida por  $R = \tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b}$ .

**Observación:** La interpretación física de este ejercicio es la siguiente: Cuando un cuerpo rígido (un trompo o una piedra, por ejemplo) gira alrededor de un punto existe un “eje instantáneo de rotación” que es el lugar de los puntos que están fijos es ese instante (velocidad nula). Si pensamos en el triedro de Frenet fijo al cuerpo rígido, el eje instantáneo está dado por  $R$ .

6. Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva (no necesariamente parametrizada por la longitud de arco) y sea  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  una reparametrización de  $\alpha(I)$  por la longitud de arco  $s = s(t)$  medido desde  $t_0 \in I$ . Sea  $t = t(s)$  la función inversa de  $s$  y denotemos  $\frac{d\alpha}{dt} = \alpha'$ ,  $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \alpha''$  y  $\frac{d^3\alpha}{dt^3} = \alpha'''$ .

a) Probar que  $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\alpha'|}$  y  $\frac{d^2t}{ds^2} = -\frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{|\alpha'|^4}$ .

b) Probar que la curvatura de  $\alpha$  en  $t$  es  $\kappa(t) = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3}$ .  
*Sugerencia: utilice la regla de la cadena y tome  $|\quad|^2$ .*

c) Probar que la torsión de  $\alpha$  en  $t$  es  $\tau(t) = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{|\alpha' \times \alpha''|^2}$ .

7. Hallar la curvatura y torsión de las siguientes curvas en  $\mathbb{R}^3$ .

a)  $x = u$ ,  $y = u^2$ ,  $z = u^3$ .

b)  $x = u$ ,  $y = \frac{1+u}{u}$ ,  $z = \frac{1-u^2}{u}$ . Notar que  $\tau = 0$ .

c)  $y = f(x)$ ,  $z = g(x)$ .

d)  $x = a(u - \sin(u))$ ,  $y = a(u - \cos(u))$ ,  $z = bu$ .

e)  $x = a(3u - u^3)$ ,  $y = 3au^2$ ,  $z = a(3u + u^3)$ .

8. Una **traslación** por un vector  $v \in \mathbb{R}^3$  es la aplicación  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $A(p) = p + v$ . Una aplicación lineal  $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una **transformación ortogonal** si  $\langle \rho(u), \rho(v) \rangle = \langle u, v \rangle \forall u, v \in \mathbb{R}^3$ . Un **movimiento rígido en  $\mathbb{R}^3$**  es la composición de una traslación seguida por una transformación ortogonal con determinante positivo (esto último para preservar la orientación de  $\mathbb{R}^3$ ).

a) Mostrar que la norma de un vector y el ángulo  $\theta$  entre dos vectores ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) son preservados por transformaciones ortogonales de determinante positivo.

b) Mostrar que el producto vectorial de dos vectores es **covariante** (es decir,  $T(u) \times T(v) = T(u \times v)$ ) para transformaciones ortogonales con determinante positivo. Qué ocurre con las transformaciones ortogonales de determinante negativo?

c) Probar que la longitud de arco, la curvatura y la torsión de una curva son invariantes por transformaciones rígidas.

9. Una curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  es llamada **hélice** si las tangentes de  $\alpha$  forman un ángulo constante con alguna dirección fija.

a) Asumiendo que  $\tau(s) \neq 0 \forall s \in I$ , probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

i)  $\alpha$  es una hélice.

ii)  $\frac{\kappa}{\tau}$  es constante.

iii) Las rectas que contienen a  $n(s)$  y pasan por  $\alpha(s)$  son paralelas a un plano fijo.

iv) Las rectas que contienen a  $b(s)$  y pasan por  $\alpha(s)$  tienen un ángulo constante con una dirección fija.

b) Probar que la curva

$$\alpha(s) = \left( a \cos\left(\frac{s}{c}\right), a \sin\left(\frac{s}{c}\right), b \frac{s}{c} \right)$$

con  $s \in \mathbb{R}$  y  $a, b, c$  constantes tales que  $c^2 = a^2 + b^2$  es una hélice parametrizada por longitud de arco con  $\frac{\kappa}{\tau} = \frac{b}{a}$ .

10. Probar que si la cúbica  $x = at$ ,  $y = bt^2$ ,  $z = t^3$  satisface la condición  $2b^2 = 3a$ , entonces es una hélice trazada sobre un cilindro de generatrices paralelas al plano  $xz$  y que forman un ángulo de  $\frac{\pi}{4}$  con el eje  $x$ . Hallar la ecuación del cilindro.
11. Dada una curva  $\alpha$  en  $\mathbb{R}^3$  parametrizada por longitud de arco, se considera la curva  $\beta$  obtenida al trasladar los vectores tangentes unitarios de  $\alpha$  al origen. La curva  $\beta$  es una curva en la esfera unitaria  $S^2$  y es llamada la **indicatriz esférica** de  $\alpha$ .
- a) Probar que  $\kappa_\beta = \frac{ds_\beta}{ds_\alpha}$ .
- b) Hallar la indicatriz de una recta, una hélice circular y una curva plana.
- c) Verificar que en el caso de una curva plana vale  $\frac{ds_\beta}{ds_\alpha} = \frac{d\theta}{ds_\alpha} n_\alpha$  donde  $\theta$  es el ángulo entre un eje fijo y  $\beta$ . Por lo tanto, para una curva plana, se tiene

$$\kappa_\alpha = \frac{d\theta}{ds}.$$

12. Probar que la indicatriz esférica de una curva es una circunferencia si y sólo si la curva es una hélice.
13. Probar que la curva dada por

$$x = a \sin^2(u), \quad y = a \sin(u) \cos(u), \quad z = a \cos(u)$$

está sobre una esfera y que todos los planos normales pasan por el origen. Probar que la curva es una cuártica.

14. Sea  $\alpha$  una curva en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\tau(s) \neq 0$  y  $\kappa'(s) \neq 0$  para todo  $s \in I \subset \mathbb{R}$ . Probar que  $\alpha$  está contenida en una esfera si y sólo si

$$R^2 + (R')^2 T^2 = A$$

con  $R = \frac{1}{\kappa}$ ,  $T = \frac{1}{\tau}$  y  $A$  alguna constante.

15. Sea  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por longitud de arco. Considere un intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  y  $\alpha(a) = p$  y  $\alpha(b) = q$ .

- a) Mostrar que, para todo vector unitario  $v$ , vale

$$(q - p) \cdot v = \int_a^b \alpha'(t) \cdot v dt \leq \int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

b) Tomar  $v = \frac{q-p}{|q-p|}$  y mostrar que

$$|\alpha(b) - \alpha(a)| \leq \int_a^b |\alpha'(t)| dt$$

y por lo tanto la curva con menor longitud de arco que une los puntos  $\alpha(a)$  con  $\alpha(b)$  es la línea recta.

16. Sea  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por longitud de arco, con curvatura y torsión nunca nulas. Sea  $P$  un plano que satisface las siguientes condiciones:
- $P$  contiene la recta tangente en  $s_0$ .
  - Para todo entorno  $I \subset \mathbb{R}$  de  $s_0$ , existen puntos de  $\alpha(I)$  a ambos lados de  $P$ .

Probar que  $P$  es el plano osculador de  $\alpha$  en  $s_0$ .

17. Probar que bajo cualquiera de las siguientes condiciones, la curva en cuestión es plana:
- Todos los planos osculadores en los distintos puntos de la curva pasan por un punto fijo.
  - Todos los planos osculadores son paralelos a un plano dado.

18. Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular (no necesariamente parametrizada por longitud de arco) con  $\kappa(t) \neq 0$  y  $\tau(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ . Diremos que la curva  $\alpha$  es una **curva de Bertrand** si existe una curva  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que las rectas normales de  $\alpha$  y  $\beta$  para  $t \in I$  son iguales. En este caso  $\beta$  es la **compañera de Bertrand de  $\alpha$**  y se puede escribir

$$\beta(t) = \alpha(t) + rn(t).$$

Probar que:

- En la expresión anterior,  $r$  es constante.
- $\alpha$  es una curva de Bertrand si y sólo si existe una relación lineal

$$A\kappa(t) + B\tau(t) = 1 \quad \forall t \in I$$

con  $A$  y  $B$  constantes no nulas y  $\kappa$  y  $\tau$  la curvatura y torsión de  $\alpha$ .

- Si  $\alpha$  tiene más de una compañera de Bertrand, entonces tiene infinitas. Esto ocurre si y sólo si  $\alpha$  es una hélice circular.